Mécanique du point

CHAPITRE 4

Mouvement de particules chargées dans les champs électrique et magnétique

Dr N'CHO Janvier Sylvestre

Introduction

Le mouvement des particules chargées dans un champ électrique et/ou magnétique est un sujet important du fait du grand nombre d'applications qui l'utilisent. On se limite aux champs uniformes et indépendants du temps qui ne dépendent ni de la position dans l'espace ni de l'instant considérés. **Le but de ce chapitre est de comprendre comment les particules chargées se meuvent lorsqu'elles sont plongées dans un champ électromagnétique**. On exclut tout développement relativiste, ce qui implique que la vitesse des particules soit négligeable devant la vitesse de la lumière. Cette condition est restrictive car les particules accélérées par des champs électriques peuvent facilement atteindre des vitesses proches de celle de la lumière.

Notion de champ (1)

Les physiciens utilisent la notion de champ pour créer **un intermédiaire entre les causes et les effets des interactions**. Par exemple deux objets massiques A et B exercent l'un sur l'autre une interaction gravitationnelle. On peut s'intéresser à la force exercée par l'objet A sur l'objet B. Mais il est plus souvent commode de décrire d'une part le rôle de A et d'autre part l'effet subi par B. On utilise alors la notion de champ gravitationnel. Ainsi on peut déterminer le champ gravitationnel crée par A, indépendamment de tout effet sur un autre objet.

Notion de champ (2)

Mais aussi on peut étudier le comportement d'un système B placé dans un champ gravitationnel sans se préoccuper du système qui l'a engendré. **Le champ est alors un objet mathématique qui décrit les propriétés de l'espace en tout point, du fait de la présence de la source** (dans notre exemple A). Dans ce chapitre, on étudie les effets des champs électriques et magnétiques sans **se préoccuper de leur origine**.

Action d'un champ sur les particules

Sources		Champs		Effets
Masse M	produit $\Rightarrow$	Champ gravitationel $\vec{g}$	affecte $\Rightarrow$	Les autres masses via $\vec{F} = m\vec{g}$
Charge Q	produit $\Rightarrow$	Champ électrique $\vec{E}$	affecte $\Rightarrow$	Les autres charges via $\vec{F} = q\vec{E}$
Charge en mouvement (courant)	produit $\Rightarrow$	Champ magnétique $\vec{B}$	affecte $\Rightarrow$	Les autres charges en mouvement (courant) via $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ $\vec{F} = I\,\vec{\ell} \wedge \vec{B}$

Définitions

- **Un champ uniforme** est un champ dont les caractéristiques sont les mêmes en tout point de l'espace considéré:

$\forall (M,P)$ $\in$ espace considéré et $\forall t$: $\vec{C}(M,t) = \vec{C}(P,t)$

- **Un champ stationnaire** est un champ dont les caractéristiques sont indépendantes du temps:

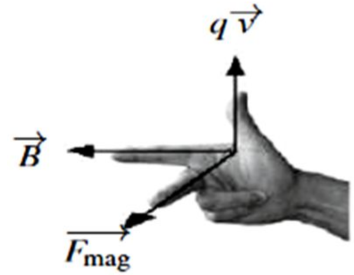
$\forall M$ $\in$ espace considéré et $\forall (t,t')t$: $\vec{C}(M,t) = \vec{C}(M,t')$

Force de Lorentz

Définitions

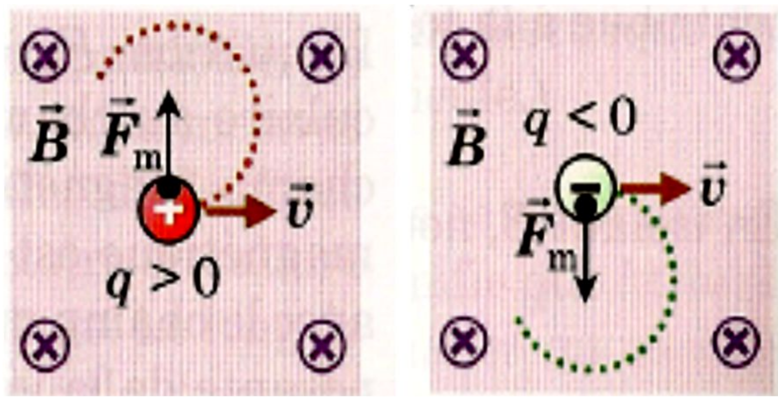
Soit une particule de charge q, de masse m, animée d'une vitesse $\vec{v}$, dans un référentiel galiléen $\Re_g$, en présence d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{B}$. Elle est soumise à la **force de Lorentz**:

$$\boxed{\vec{F} = q\left[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right]}$$

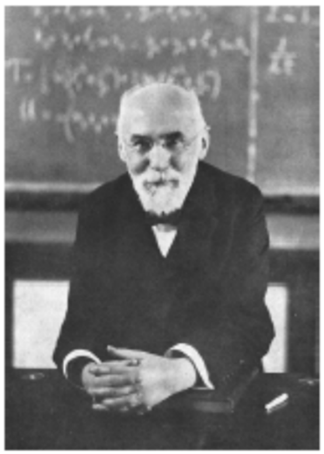


Remarques:

- Les expressions de $\vec{F}$, q, m ne dépendent pas du référentiel de travail
- Les expressions de $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{v}$ dépendent du référentiel de travail
- E/B est homogène à une vitesse



Un peu d'histoire



Hendrik Antoon Lorentz (né le 18 juillet 1853 à Arnhem, Pays-Bas ; mort le 4 février 1928 à Haarlem, Pays-Bas) est un physicien qui reçut en 1902 le prix Nobel de physique et en 1908 la Médaille Rumford. Il fut lauréat de la Médaille Franklin en 1917 pour ses travaux sur la nature de la lumière et la constitution de la matière. Il reçut également la médaille Copley en 1918.

La majorité de ses travaux portèrent sur l'électromagnétisme. Il a laissé son nom aux transformations de Lorentz qui sont à la base de la théorie de la relativité restreinte.

Puissance de la force de Lorentz (1)

- $P = \vec{F}.\vec{v} = q\vec{E}.\vec{v} + \underbrace{q\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right).\vec{v}}_{=0 \text{ car } \vec{v} \wedge \vec{B} \perp \vec{v}} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{P = q\vec{E}.\vec{v}}}$

La force électrique travaille, la force magnétique ne travaille pas.

→ **La force électrique**

– Permet d' accélérer ou de déceler une particule, c'est-à-dire de modifier $\|\vec{v}\|$.

– permet de modifier la trajectoire de la particule, c'est-à-dire de modifier la direction de $\vec{v}$

→ **La force magnétique**

– Ne permet pas d' accélérer ou de déceler une particule.

– permet de modifier la trajectoire de la particule, c'est-à-dire de modifier la direction de $\vec{v}$ (mais pas sa norme)

Puissance de la force de Lorentz (2)

❑ **Si $\vec{\mathrm{E}}$ seul** ($\vec{\mathrm{F}} = q\vec{\mathrm{E}}$ est une force conservative)

$$\underbrace{\Delta E_p}_{\substack{\text{Variation de} \\ \text{l'énergie potentielle} \\ \text{du système} \\ \text{particule–champ electrique}}} = E_{pb} - E_{pa} = -\underbrace{q\int_a^b \vec{E}.\overrightarrow{d\ell}}_{\substack{\text{Travail de la force} \\ \text{electrostatique}}}$$

$$\underbrace{\Delta V}_{\substack{\text{Variation du} \\ \text{potentiel électrostatique} \\ \text{du système} \\ \text{particule–champ electrique}}} = V_b - V_a = -\underbrace{\int_a^b \vec{E}.\overrightarrow{d\ell}}_{\substack{\text{Travail de la force} \\ \text{electrostatique}}}$$

Puissance de la force de Lorentz (3)

Si $\vec{\mathrm{E}} = \overrightarrow{cte}$ alors $\quad \Delta V = -E \int_a^b . \overrightarrow{d\ell} = -Ed$

Définition du **potentiel électrostatique** : $\boxed{\boldsymbol{E_P = qV \Longrightarrow V = \frac{E_P}{q}}}$

le théorème de l'énergie mécanique implique la conservation de l'énergie mécanique d'où

$$\boxed{\boldsymbol{E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2}mv^2 + qV = cte}}$$

Puissance de la force de Lorentz (4)

$$\underbrace{\Delta E_c}_{\substack{\text{Variation de} \\ \text{l'énergie cinetique} \\ \text{du système} \\ \text{particule}-\text{champ electrique}}} = E_{cb} - E_{ca} = -q(V_b - V_a)$$

Pour faire varier l'énergie cinétique et donc la norme de la vitesse d'une particule chargée soumise uniquement à une force électromagnétique, il faut lui faire franchir une différence de potentiel ΔV. La variation de l'énergie cinétique est dans ce cas :

$$\boxed{\boxed{\Delta E_c = -q\Delta V}}$$

Puissance de la force de Lorentz (5)

- **Si $q > 0$**, la particule sera accélérée par une différence de potentiel $\Delta V < 0$ et freinée par une différence de potentiel $\Delta V > 0$.
- **Si $q < 0$**, la particule sera accélérée par une différence de potentiel $\Delta V > 0$ et freinée par une différence de potentiel $\Delta V < 0$.

❑ Si $\overrightarrow{B}$ seul

Théorème de la puissance cinétique:

$$P = q(\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{v} = 0$$

$$\frac{dE_c}{dt} = P = 0 \Longrightarrow \boxed{\|\vec{v}\| = v = cte}$$

Puissance de la force de Lorentz (6)

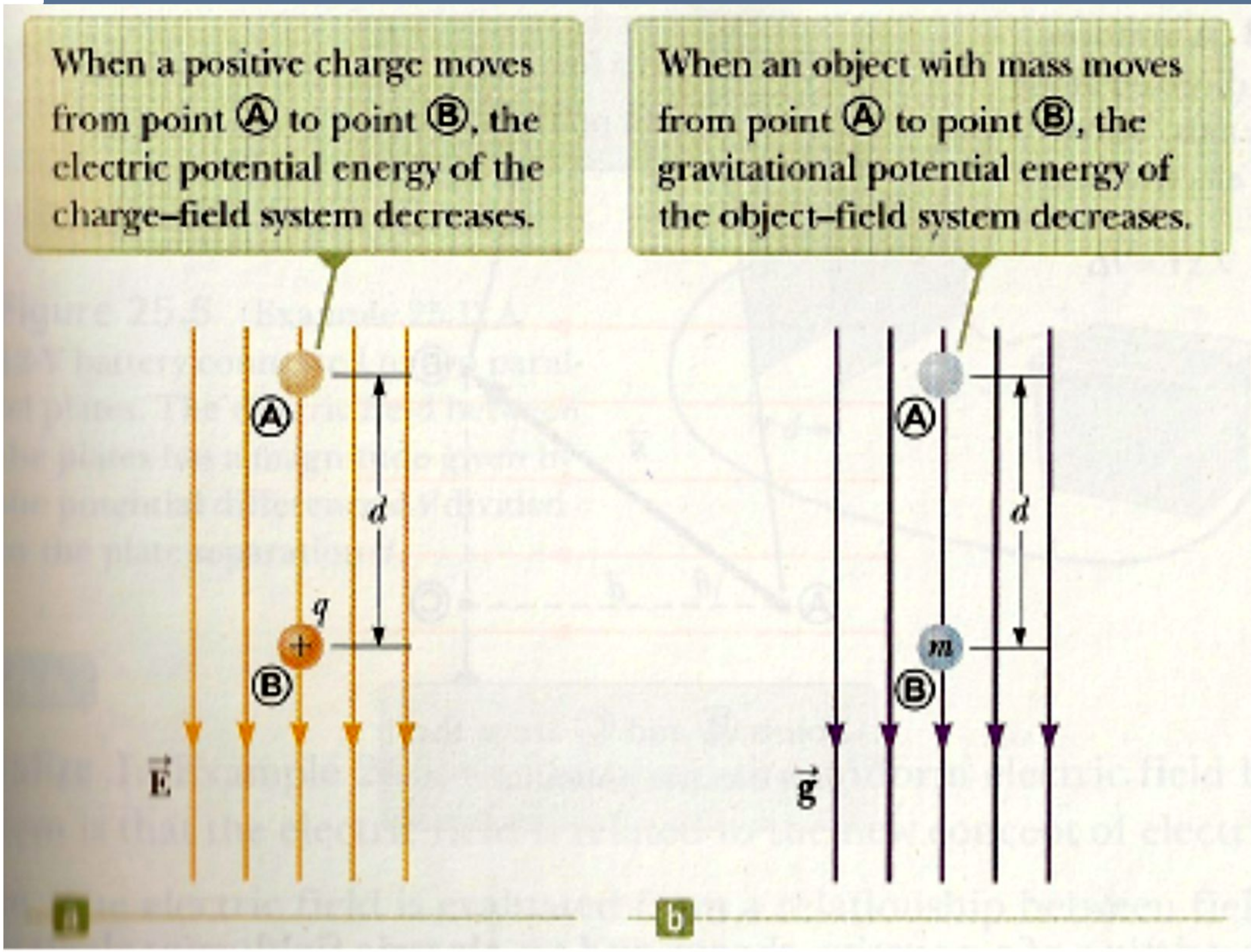
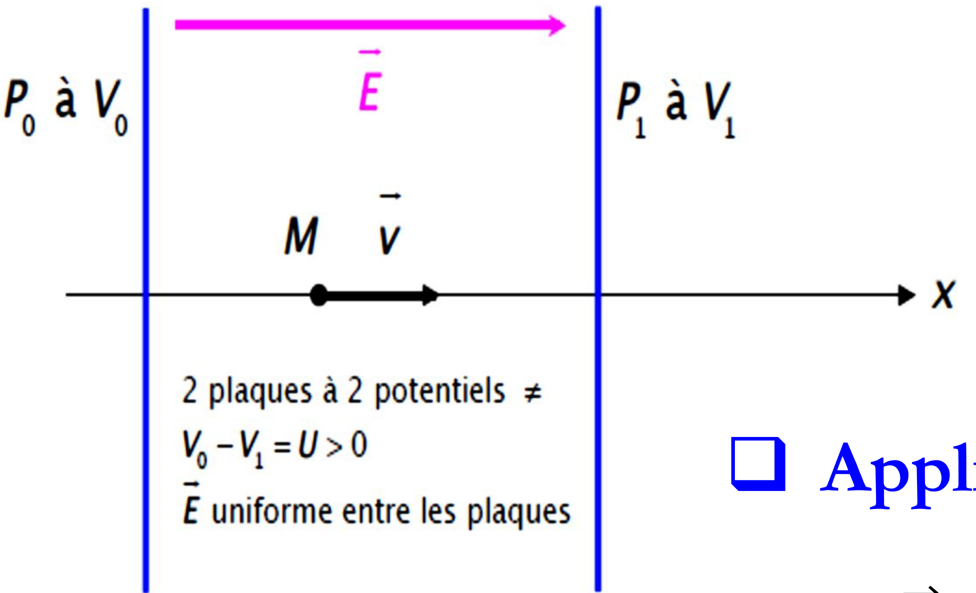


Figure 25.2 (a) When the electric field $\vec{\mathbf{E}}$ is directed downward, point Ⓑ is at a lower electric potential than point Ⓐ. (b) A gravitational analog to the situation in (a).

Mouvement d’une particule chargée dans un champ électrique uniforme et indépendant du temps

Rôle accélérateur (cas étudié: $\vec{E} \parallel \vec{v}_0$) (1)



Soit un proton $m = 1{,}7\times10^{-27}$ kg et $q = 1{,}6\times10^{-19}$ C
A $t = 0$, le proton est en O avec $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$
$\vec{v}_1$ quand proton en P_1 ?

- Application de la 2ème loi de Newton

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} \Longrightarrow \vec{v} = \frac{q\vec{E}}{m}t + \vec{v}_0 \Longrightarrow \vec{r} = \frac{q\vec{E}}{2m}t^2 + \vec{v}_0 t + \underbrace{\vec{r}_0}_{=\vec{0}}$$

$$\boxed{x = \frac{qE}{2m}t^2 + v_0 t}$$

Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Rôle accélérateur (cas étudié: $\vec{E} \parallel \vec{v}_0$) (2)

❑ Conservation de l'énergie mécanique

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + qV_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 \Rightarrow \boxed{v_1^2 = v_0^2 + \frac{2q}{m}U}$$

$$v_1 > v_0 \text{ car } U = V_0 - V_1 > 0 \text{ et } q > 0$$

- <u>Accélération de particules chargées positivement</u>

$$\text{Si } v_0 = 0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2q}{m}U}$$

***U* est appelée tension accélératrice**

Rôle accélérateur (cas étudié: $\vec{E} \parallel \vec{v}_0$) (3)

- **Accélération de particules chargées negativement**

$$\text{Si } v_0 = 0 \Longrightarrow \quad \boldsymbol{v_1 = \sqrt{\frac{-2q}{m}U}}$$

❑ Limite relativiste

$$\text{Si } v_0 = 0 \Longrightarrow \quad v = \frac{qE}{m}t \Longrightarrow v(t = \infty) = \infty$$

Calcul classique valable si $v/c \ll 1$. On se fixe comme critère $v/c < 0{,}1$

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} < 0{,}1c \Longrightarrow U < 0{,}01\frac{mc^2}{2q}$$

Rôle accélérateur (cas étudié: $\overrightarrow{E} \parallel \vec{v}_0$) (4)

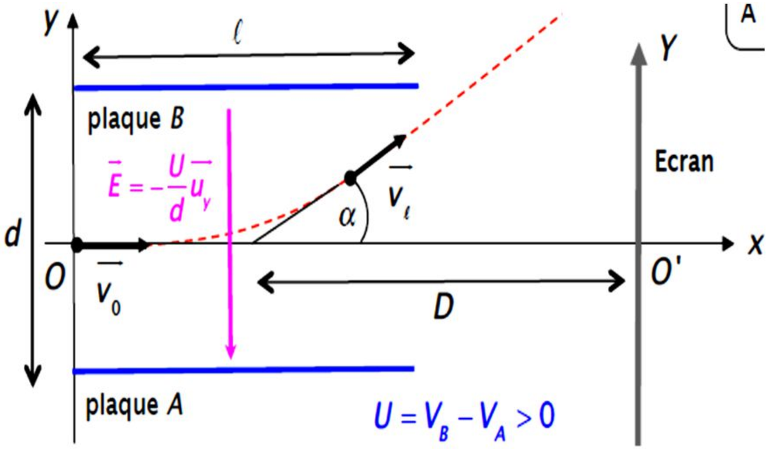
→Proton: $m = 1{,}7 \times 10^{-27}\text{kg}$

$$\boxed{\boldsymbol{U < 4{,}7 \times 10^{6}\ \mathrm{V}}}$$

→Electron: $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\text{kg}$

$$\boxed{\boldsymbol{|U| < 2500\ \mathrm{V}}}$$

Déflexion électrostatique (cas étudié: $\vec{E} \perp \vec{v}_0$) (1)



Soit un électron $m = 9{,}1\times10^{-31}$ kg et $-q = -1{,}6\times10^{-19}$ C

A $t = 0$, l'électron est en O avec $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$

- **Application de la 2ème loi de Newton**

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = -q\vec{E}$$

$$\Rightarrow \text{sur } (Ox)\ \frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = v_0 \Rightarrow x = v_0 t$$

$$\Rightarrow \text{sur } (Oy)\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{-qE}{m} \Rightarrow v_y = \frac{-qE}{m}t \Rightarrow y = \frac{-qE}{2m}t^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{y = \frac{qU}{2mdv_0^2}x^2}}$$

pour $0 < x < \ell \Rightarrow$ **mouvement parabolique**

pour $x > \ell \Rightarrow$ **mouvement rectiligne uniforme car on néglige le poids**

Déflexion électrostatique (cas étudié: $\vec{E} \perp \vec{v}_0$) (2)

❑ Calcul de la déflexion

On cherche l'équation de la tangente en ℓ à la courbe parabolique

$$y = ax + b, \qquad a = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\ell} = \frac{qU}{mdv_0^2}\ell \quad y(x=\ell) = \frac{qU}{2mdv_0^2}\ell^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{\boxed{y = \frac{qU}{mdv_0^2}\ell\left(x - \frac{\ell}{2}\right)}} \qquad \left(y = 0, x = \frac{\ell}{2}\right)$$

$$\tan\alpha = \frac{Y}{D} = \frac{qU}{mdv_0^2}\ell \Longrightarrow \boxed{\boxed{\boldsymbol{Y = \frac{qU}{mdv_0^2}\ell D}}}$$

Déflexion électrostatique (cas étudié: $\vec{E} \perp \vec{v}_0$) (3)

❑ Applications

→Si U et v_0 sont fixés, Y dépend du rapport q/m On peut trier les particules selon q/m, principe du **spectrographe de masse**.

→La déflexion Y est proportionnelle à la tension U, principe du **canon à électron** (tube cathodique, oscilloscope)

Récapitulatif

Une particule chargée qui pénètre dans un champ électrique uniforme et stationnaire peut adopter deux types de mouvements :

- Si la particule est initialement au repos ou si sa vitesse initiale est colinéaire au champ, alors le mouvement sera **rectiligne uniformément varié**. Le mouvement pourra être :
  - **Accéléré** si : – la charge est initialement au repos ;
    – la charge est positive avec une vitesse initiale dans le même sens que le champ;
    – la charge est négative avec une vitesse initiale en sens contraire du champ.
  - **Déceléré** si : – la charge est négative avec une vitesse initiale dans le même sens que le champ;
    – la charge est positive avec une vitesse initiale en sens contraire du champ.
- Si la vitesse de la particule n'est pas colinéaire au champ, alors le mouvement sera **parabolique** avec des équations comparables à celle du tir dans le champ de pesanteur. Le sens de la courbure de la trajectoire dépend du signe de la charge et de l'orientation de la vitesse initiale par rapport au champ électrique.

Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et indépendant du temps

Mouvement uniforme (1)

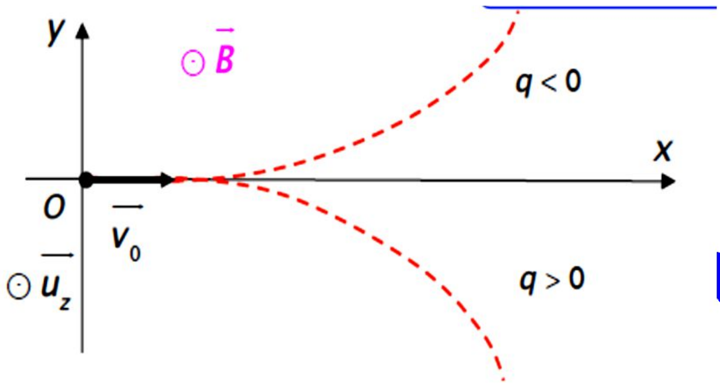
On étudie le mouvement d'une particule de charge q et de masse m dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ de norme B. À l'instant initial, la particule est animée d'une vitesse initiale $\vec{v}_0$ de norme v_0 et de direction perpendiculaire à $\vec{B}$. On modélise la particule par un point matériel M et on étudie son mouvement dans le référentiel du laboratoire considéré comme galiléen. La particule est soumise aux forces suivantes :

- la force magnétique : $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$
- son poids qui sera négligé compte tenu des ordres de grande

Mouvement uniforme (2)

Dans un premier temps, on s'intéresse uniquement à la norme de la vitesse et on utilise le théorème de l'énergie cinétique. La force magnétique étant perpendiculaire à la vitesse à chaque instant, sa puissance, et par conséquent son travail, sont nuls. L'application du théorème de l'énergie cinétique : $\boldsymbol{\Delta E_C = W\left(\vec{f}\right) = 0}$ montre que l'énergie cinétique de la particule est une constante du mouvement. Par conséquent, le module de sa vitesse conserve sa valeur initiale v_0. **Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique est uniforme.**

Mouvement circulaire (cas étudié: $\vec{B} \perp \vec{v}_0$) (1)



Soit un particule, masse m, charge q

A $t = 0$, particule en O avec $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$

- **Application de la 2ème loi de Newton: trajectoire plane**

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{qB}{m}\vec{v} \wedge \vec{u}_z$$

On pose par définition que: $\boxed{\omega = \frac{qB}{m}}$ homogène à une pulsation.

Equation du mouvement à résoudre: $\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \omega\vec{v} \wedge \vec{u}_z}$

Mouvement circulaire (cas étudié: $\vec{B} \perp \vec{v}_0$) (2)

Sur $\underline{Ox}$:

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega v_y$$

Sur $\underline{Oy}$:

$$\frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x$$

Sur $\underline{Oz}$:

$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \Longrightarrow z = cte = 0\ \forall t$$

$\forall t$, la trajectoire de la particule est dans le plan $xOy \perp \vec{B}$ et $\|\vec{v}\| = v = cte$

- **Détermination complète de la nature de la trajectoire: méthode de la variable complexe**

On introduit par définition : $\boxed{z = x(t) + jy(t)}$

$$\Longrightarrow \dot{z} = v_x + jv_y \Longrightarrow \frac{d\dot{z}}{dt} = \omega v_y - j\omega v_x = -j\omega\left(v_x + jv_y\right) = -j\omega\dot{z}$$

Mouvement circulaire (cas étudié: $\vec{B} \perp \vec{v}_0$) (3)

On doit résoudre: $\boxed{\dfrac{d\dot{z}}{\dot{z}} = -j\omega dt}$

$1^{\text{ère}}$ intégration entre $t = 0$ et t: $\dot{z}(t) = \dot{z}(0)e^{-j\omega t} = v_0 e^{-j\omega t}$

$2^{\text{ème}}$ intégration entre $t = 0$ et t: $z(t) = \dfrac{v_0}{-j\omega}e^{-j\omega t} + cte$ (complexe)

$$\Longrightarrow z(0) = 0 \Longrightarrow cte = \frac{v_0}{j\omega} \Longrightarrow z(t) = \frac{v_0}{j\omega}\left(1 - e^{-j\omega t}\right)$$

$$\Longrightarrow z(t) = -\frac{v_0}{\omega}[-\sin\omega t + j(1 - \cos\omega t)]$$

Mouvement circulaire (cas étudié: $\vec{B} \perp \vec{v}_0$) (4)

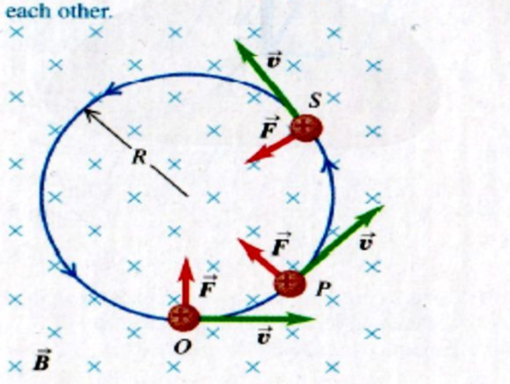
$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) \\ y(t) &= -\frac{v_0}{\omega}\left[1-\cos(\omega t)\right] \end{aligned}\right\} \text{Equations paramétriques d'un cercle de rayon } R = \frac{v_0}{|\omega|} = \frac{mv_0}{|q|B} \text{ et de centre } C\left(0, -\frac{v_0}{\omega}\right)$$

$$\text{Trajectoire circulaire uniforme à } \omega = \frac{|q|B}{m}, \text{ période } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\frac{m}{|q|B}$$

27.17 A charged particle moves in a plane perpendicular to a uniform magnetic field $\vec{B}$.

(a) The orbit of a charged particle in a uniform magnetic field

A charge moving at right angles to a uniform $\vec{B}$ field moves in a circle at constant speed because $\vec{F}$ and $\vec{v}$ are always perpendicular to each other.



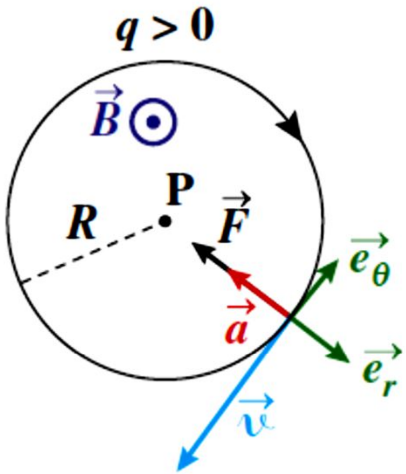
Si la vitesse initiale de la particule est perpendiculaire au champ magnétique , **le mouvement est circulaire uniforme**. Il est facile de retrouver le rayon de la trajectoire. En effet, pour un mouvement circulaire uniforme, l'accélération vaut (figure 27-17) :

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r$$

L'application du principe fondamental de la dynamique donne :

$$\boxed{-m\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r} = -|q|vB\overrightarrow{u_r} \quad \Rightarrow R = \frac{mv}{|q|B}}$$

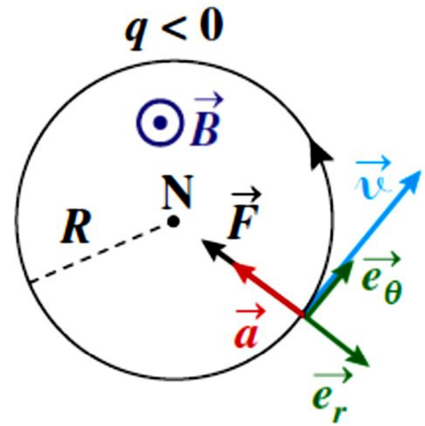
Mouvement circulaire (cas étudié: $\vec{B} \perp \vec{v}_0$) (5)



$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \pm v_0 \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r$$

$$\vec{B} = B\vec{e}_z$$



$$\begin{aligned} q\vec{v} \wedge \vec{B} &= q(-v_0\vec{e}_\theta) \wedge B\vec{e}_z \\ &= -qv_0B\vec{e}_r = -|q|v_0B\vec{e}_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q\vec{v} \wedge \vec{B} &= q(v_0\vec{e}_\theta) \wedge B\vec{e}_z \\ &= qv_0B\vec{e}_r = -|q|v_0B\vec{e}_r \end{aligned}$$

Le sens de la trajectoire circulaire dépend du signe de la charge. Les charges positives tourneront dans le sens horaire autour du champ alors que les charges négatives tourneront dans le sens trigonométrique.

Applications (1)

Sélecteur de vitesse

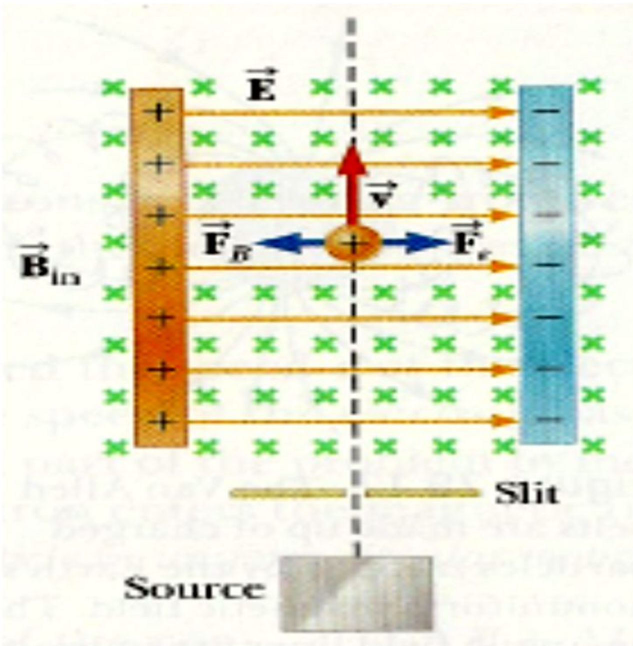


Figure 29.13 A velocity selector. When a positively charged particle is moving with velocity $\vec{v}$ in the presence of a magnetic field directed into the page and an electric field directed to the right, it experiences an electric force $q\vec{E}$ to the right and a magnetic force $q\vec{v} \times \vec{B}$ to the left.

Les particules qui vont tout droit dans le dispositif ci-dessous sont telles que:

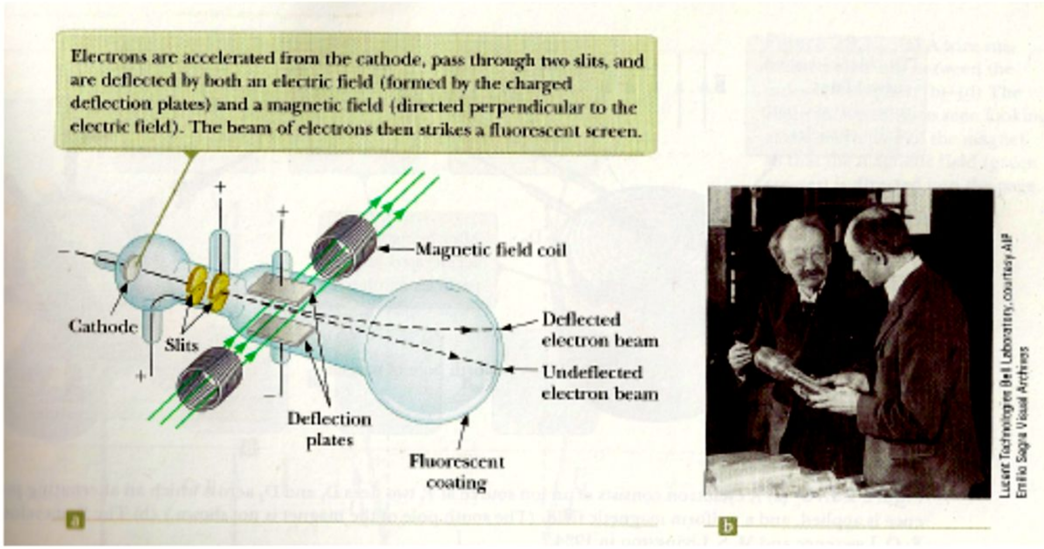
$$\boxed{v = \frac{E}{B}}$$

Pourquoi ?

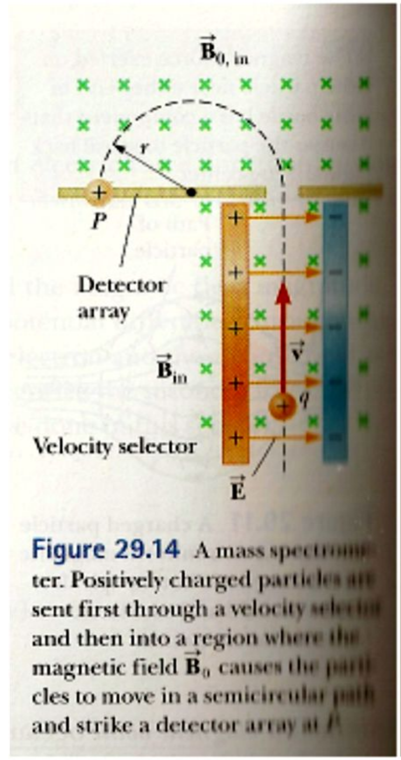
On peut donc sélectionner des particules avec la vitesse désirée en réglant les valeurs des champs.

Applications (2)

Spectromètre de masse



Spectromètre utilisé par J. J. Thomson (1856-1940) en 1897 pour mesurer le rapport charge sur masse de l'électron. Cette expérience cruciale a permis la découverte de l'électron comme particule fondamentale de la nature



Si on a placé un sélecteur de vitesse au préalable et en utilisant la relation de gauche, on obtient:

$$\boxed{\frac{m}{q}=\frac{rB_0}{v}}$$

Un spectromètre de masse (figure 29-14) sépare les particules de telle façon que le rapport masse sur charge soit égal à:

$$\boxed{\frac{m}{q}=\frac{rB_0B}{E}}$$

Mouvement hélicoïdal

Cas étudié: $\overrightarrow{v_0} = \underbrace{v_0 \cos\theta \overrightarrow{u_z}}_{\parallel \text{ à } \vec{B}} + \underbrace{v_0 \sin\theta \overrightarrow{u_x}}_{\perp \text{ à } \vec{B}}$

Mouvement hélicoïdal:

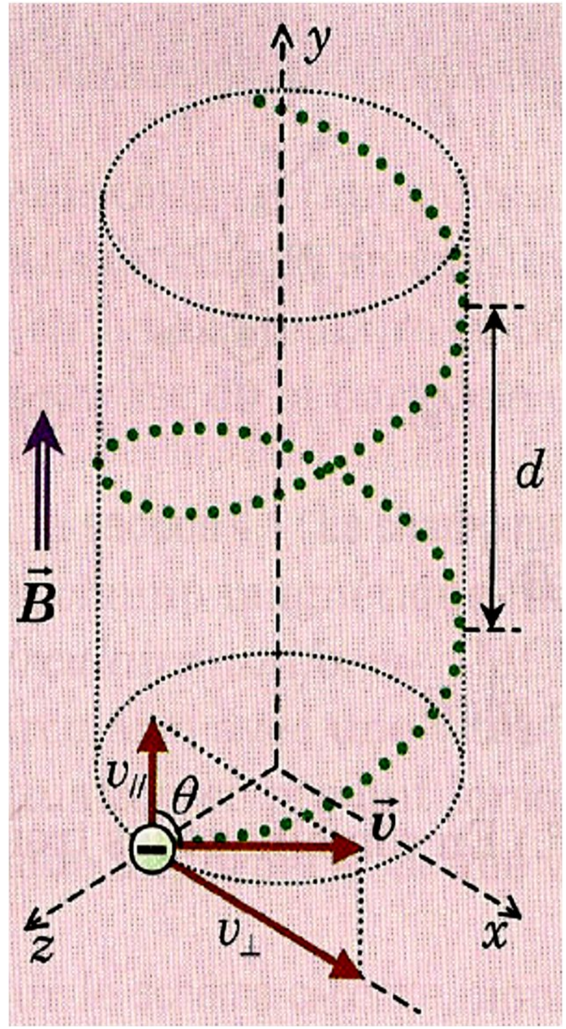
mouvement rectiligne uniforme $\vec{u}_y$

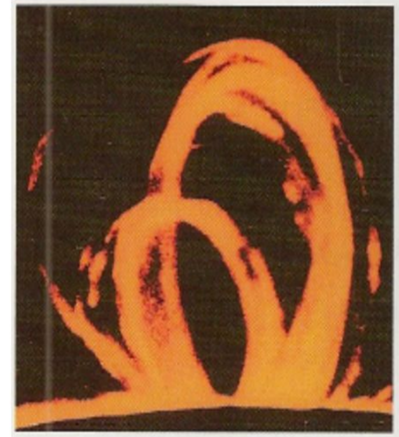
+

mouvement circulaire uniforme dans le plan xOy avec:

$$R = \frac{v_0}{|\omega|} = \frac{mv_0}{|q|B}$$

$$\text{Pas de l'hélice} = y(t+T) - y(t) = T\underbrace{v_0 \cos\theta}_{\parallel \text{ à } \vec{B}} = \frac{2\pi m v_0 \cos\theta}{|q|B}$$





La forme de ces éruptions solaires montre qu'une force centripète agit sur elles. La seule façon d'expliquer cela est de concevoir que le Soleil produit un puissant champ magnétique.

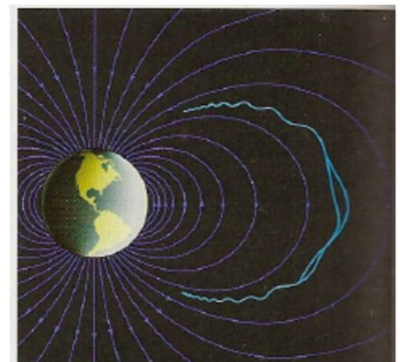
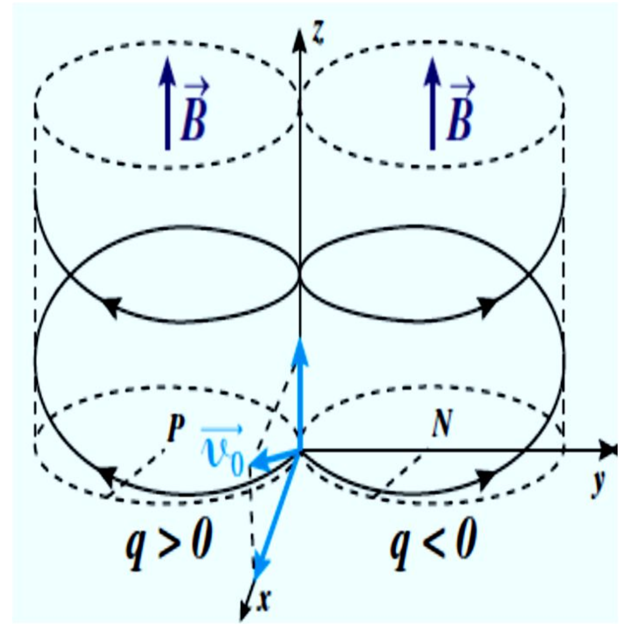


Figure 8.29 ▲ Les protons et les électrons de l'espace sont confinés par le champ magnétique terrestre.

Récapitulatif (1)

❑La force magnétique ne travaillant pas, **le mouvement d'une particule dans un champ magnétique est nécessairement uniforme**.

❑Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire est la composition d'un **mouvement rectiligne uniforme dans la direction du champ** et d'un **mouvement circulaire uniforme dans un plan orthogonal au champ**.



Ce mouvement est donc **hélicoïdal uniforme**, l'orientation de l'hélice dépend des orientations respectives de la vitesse initiale par rapport au champ et du signe de la charge

Récapitulatif (2)

On retiendra deux cas particuliers intéressants :

- **Si la vitesse initiale est colinéaire au champ, le mouvement est rectiligne uniforme suivant $\vec{B}$.**

- **Si la vitesse initiale est orthogonale au champ, le mouvement est circulaire uniforme dans un plan orthogonal au champ contenant la position initiale de la particule .**

Mouvement d'une particule chargée dans E et B uniformes et indépendants du temps

Mouvement transverse dans E et B croisés (1)

❑ Cas d'une vitesse initiale nulle

Considerons une particule de charge $q = -e$ et de masse m, se trouvant à l'instant initial immobile à l'origine O du trièdre $O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ lié à un référentiel galiléen. La particule est soumise aux actions simultanées des champs uniformes et stationnaires $\vec{E} = -E\vec{e}_y$ et $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Le PFD appliqué à la particule s'écrit:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) \Longrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{eE}{m}\vec{e}_y - \frac{eB}{m}\vec{v} \wedge \vec{e}_z$$

En projetant sur Oz: $\dfrac{dv_z}{dt} = 0 \Longrightarrow z = cte = 0 \;\; \forall t$

$\forall t$, la trajectoire de la particule est dans le plan xOy

Mouvement transverse dans E et B croisés (2)

En projection dans le plan (xOy), il vient :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{eB}{m}\dot{y} \\ \ddot{y} = \dfrac{eE}{m} + \dfrac{eB}{m}\dot{x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{eB}{m}y + 0 \\ \dot{y} = \dfrac{eE}{m}t + \dfrac{eB}{m}x + 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\omega_c y \\ \ddot{y} + \omega_c^2 y = \dfrac{eE}{m} \end{cases}$$

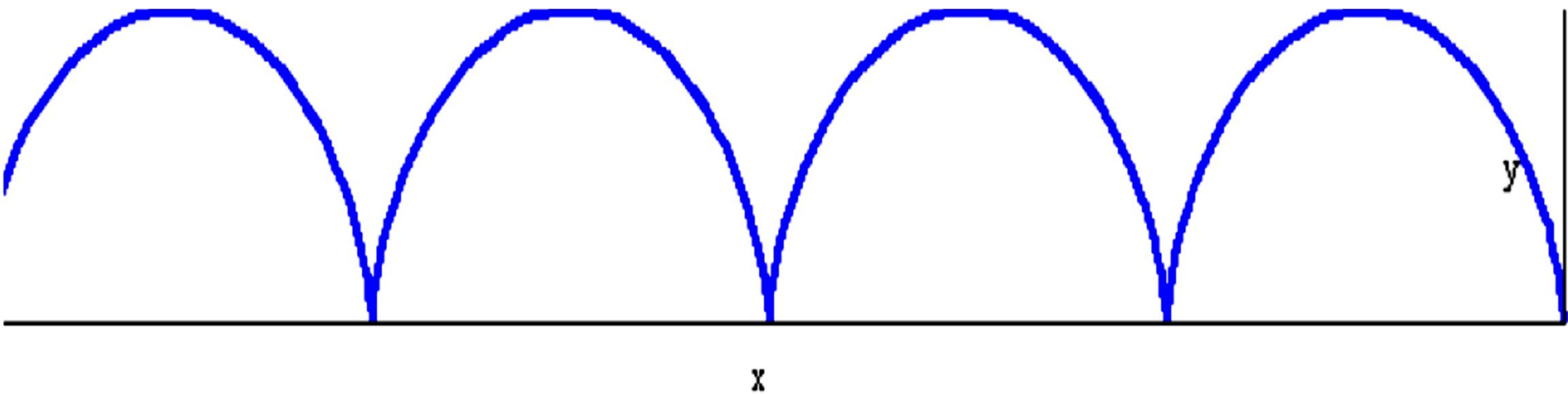
$$\omega_c = \frac{eB}{m}$$

Ce système s'intègre en: $y(t) = A\cos\omega_c t + B\sin\omega_c t + \dfrac{mE}{eB^2}$

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ \dot{y}_0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{y(t) = \frac{mE}{eB^2}(1 - \cos\omega_c t)}}$$

Mouvement transverse dans E et B croisés (3)

$$\dot{x} = -\frac{E}{B}\left(1 - \cos\omega_c t\right) \Longrightarrow \boxed{x(t) = -\frac{mE}{eB^2}\left(\omega_c t - \sin\omega_c t\right)}$$



la trajectoire est une cycloïde

Mouvement transverse dans E et B croisés (4)

❑ Cas d'une vitesse initiale non nulle: filtre de vitesse

Considerons une particule de charge q et de masse m, qui pénètre en O à l'instant initial avec une vitesse $\vec{v}_0$ colinéaire à Ox. Elle est plongée dans une région de l'espace où règnent un champ électrique et un champ magnétique croisés $\vec{E} = E\vec{e}_y$ et $\vec{B} = B\vec{e}_z$. La particule est soumise à la force de Lorentz: $\vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$. En choisissant E et B tels que $\boldsymbol{\vec{v}_0 \wedge \vec{B} = -\vec{E}}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{E = v_0 B}$, la force de Lorentz est nulle à $t = 0$, et la particule continue son mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v}_0$. Il en est ainsi de proche en proche.

Mouvement transverse dans E et B croisés (5)

Ainsi:

Toutes les particules ayant exactement le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ à l'entrée de la zone d'action des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, tels que $\boxed{\vec{v}_0 \wedge \vec{B} = -\vec{E}}$ conservent dans ce filtre un mouvement rectiligne et uniforme à $\vec{v}_0$. Il suffit de placer une fente fine sur l'axe Ox à une certaine distance de O pour ne sélectionner que les particules ayant cette vitesse $\vec{v}_0$: on a réalisé un ***filtre de vitesse***.

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ parallèles

Si $\vec{E}$ et $\vec{B}$ parallèles, le projeté de la trajectoire sur un plan orthogonal aux champs est toujours un cercle. En revanche, la composante de la vitesse parallèle aux champs est accélérée : **la vitesse n'est donc pas constante et la trajectoire n'est plus hélicoïdale.**

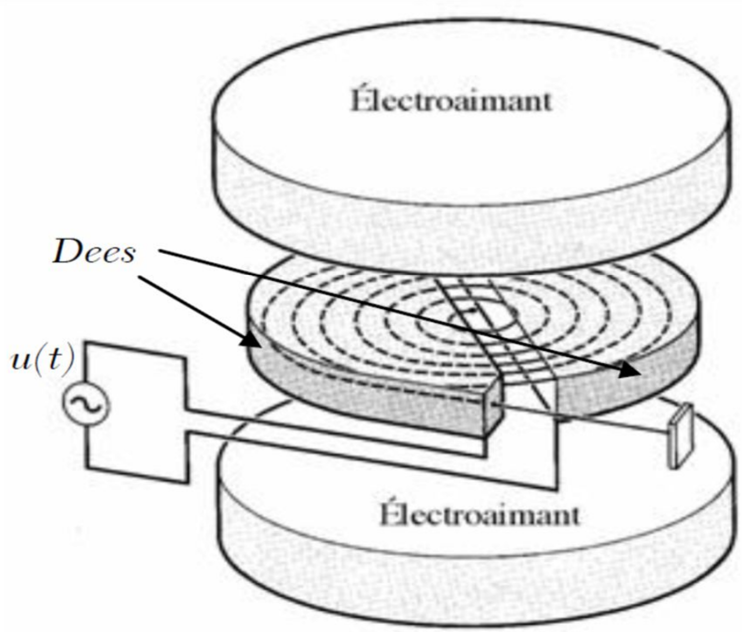
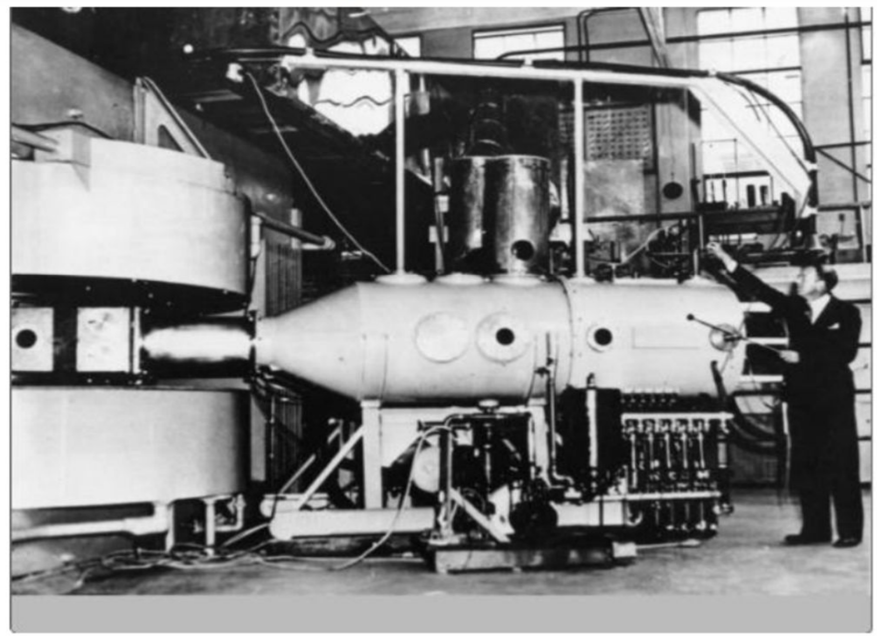
Le cyclotron (1)

Un cyclotron comporte deux électrodes en forme de demi-boîtes cylindriques métalliques creuses ou « D » (Dees en anglais), séparées par un intervalle de faible épaisseur d, entre lesquelles on établit une haute tension sinusoïdale $u(t)$ de fréquence f. Les dees sont situés dans l'entrefer d'un électro-aimant, où règne un vide poussé, qui fournit un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et parallèle aux génératrices des dees. Entre les dees, la ddp $u(t)$ crée un champ électrique uniforme variant sinusoïdalement à la fréquence f de la forme:

$$\boxed{\boldsymbol{E = \frac{U}{d} cos(2\pi f t)}}$$

Le cyclotron (2)

À l'intérieur de chaque dee, le champ électrique est considéré comme nul. Une source permet d'injecter des ions au centre dans une direction perpendiculaire à $\vec{B}$, avec une vitesse négligeable.

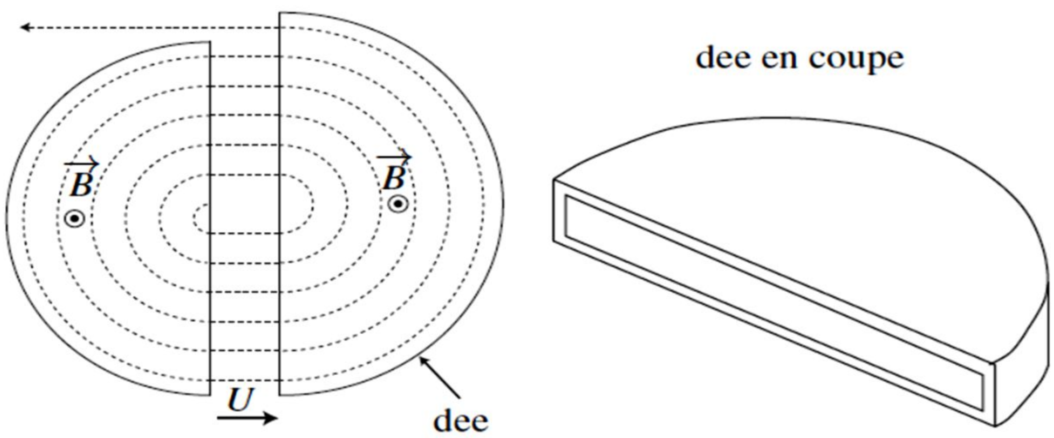
Schéma de principe d'un cyclotron.	Ernest Orlando Lawrence (1901-1958) à côté d'un cyclotron en 1945.
	

Le cyclotron (3)

❑ Principe de fonctionnement d'un cyclotron :

Admettons que les ions (de masse m et de charge q) sont accélérés une première fois par un champ électrique $E_m = U/d$ sur la distance d avant de pénétrer dans le premier dee. Quand un ion pénètre dans l'un des dees avec la vitesse $\vec{v}$ (supposée normale à Oz et aux faces des dees), **il y décrit une trajectoire circulaire**, donc ici **un demi-cercle**, de rayon R avant de retraverser l'espace entre les armatures, de largeur d.

$$\boxed{R = \frac{mv}{qB}}$$



Le cyclotron (4)

La durée du parcours dans le dee est ainsi:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_c}}}$$

où $\omega_c = \dfrac{qB}{m}$ est la pulsation cyclotron des ions considérés

Il est important de noter que la durée du parcours dans le dee, soit $\boldsymbol{\tau = \dfrac{\pi m}{qB}}$ ne dépend pas du rayon de la trajectoire : c'est sur ce principe de fonctionnement qu'on peut ainsi petit à petit accélérer les ions dans un cyclotron.

Le cyclotron (5)

Si la durée τ est égale (ou multiple impair en pratique…) à la demi-période de variation du champ électrique, le champ $E_m = -E$ accélère à nouveau les ions lors de leur passage entre les dees. On doit donc avoir $\tau = \frac{1}{2f}$, soit encore

$$\boxed{\boldsymbol{f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}}}$$

À chaque demi-tour, le champ électrique fournit aux ions le travail optimal servant à accroître l'énergie cinétique des ions

$$\boxed{\boldsymbol{W = qE_m d = qU}}$$

Le cyclotron (6)

Après n traversées dans ces conditions, l'énergie cinétique de l'ion vaut:

$$E_{c,n} = \frac{1}{2}mv_n^2 = nqU$$

Le rayon de la trajectoire est:

$$\boxed{R_n = \frac{mv_n}{qB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}\sqrt{n}}$$

Les rayons augmentent donc proportionnellement à $\sqrt{n}$. Le nombre de demi-tours est limité par le rayon maximal des *dees* (et surtout par le fait que cet isochronisme des demi-tours n'est valable que pour des ions non relativistes !).

Le cyclotron (7)

Lorsque $R_n = R_{max}$, un déflecteur dévie les ions accélérés vers une chambre d'étude